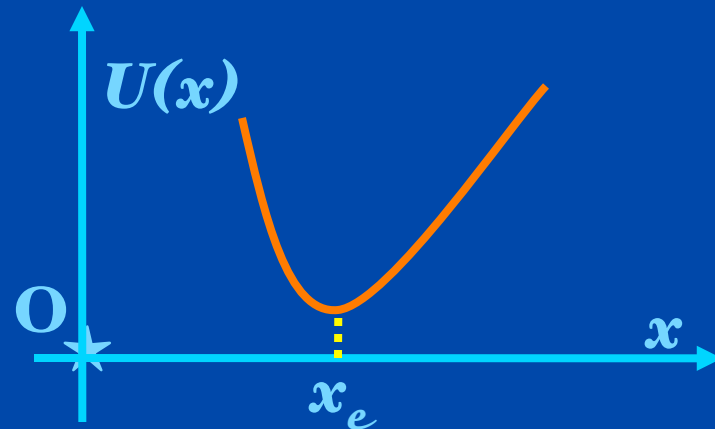


- Oscillateurs Mécaniques -

# I. Préliminaires & définitions

## Préliminaires :

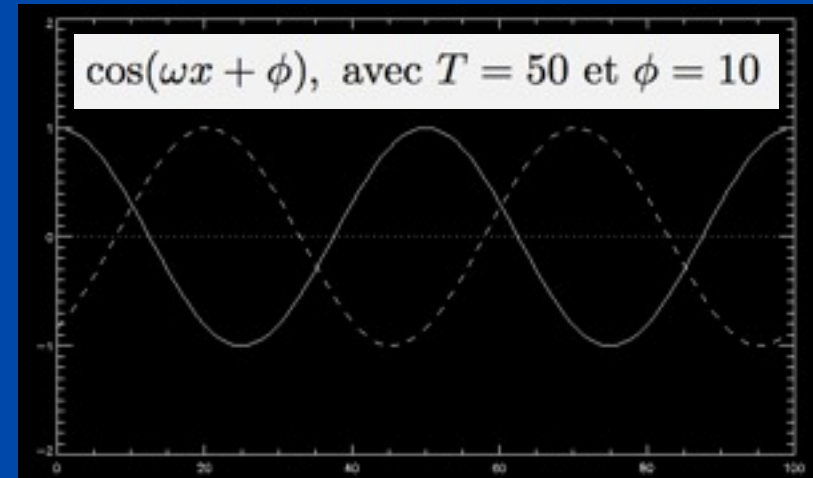
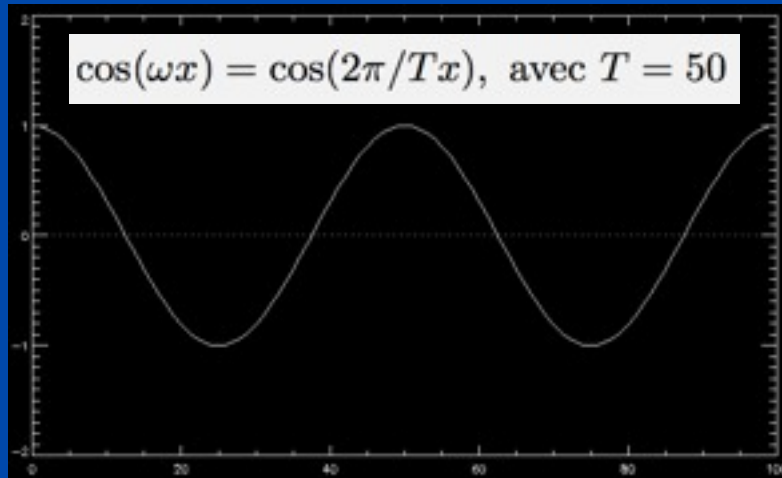
- on va se limiter à des oscillateurs à un seul degré de liberté
- ... qui oscillent autour d'une position d'équilibre *stable*



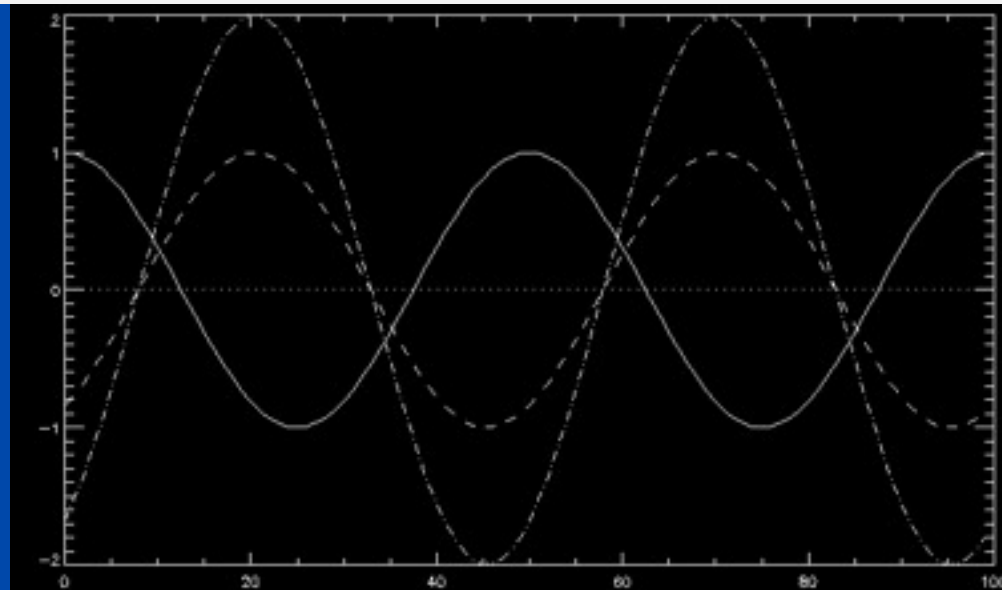
# Définitions :

- oscillateur *libre* : les oscillations se déroulent en absence de frottements et/ou d'excitation extérieure
- ≠ oscillateur *amorti* : les oscillations sont amorties par des frottements
- ≠ oscillateur *forcé* : l'oscillateur est soumis à une excitation périodique
  
- cas particulier de l'oscillateur *harmonique* : oscillateur libre pour lequel le mouvement du mobile est de type sinusoïdal...  $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$

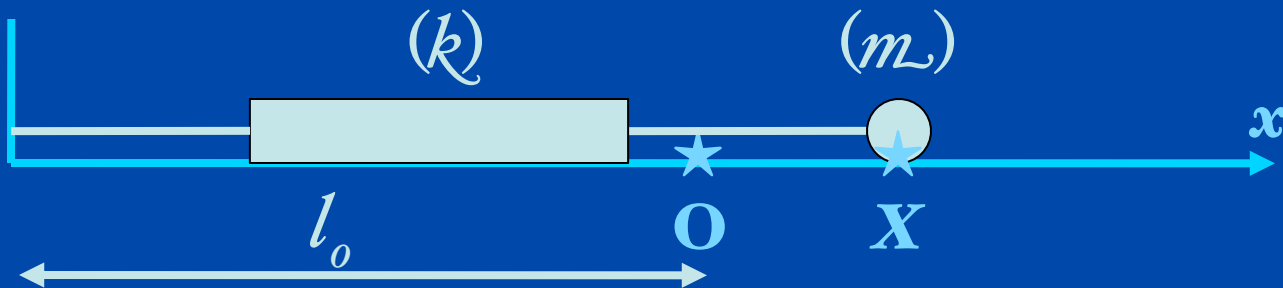
# Rappels sur le cosinus :



$x_m \cos(\omega x + \phi)$ , avec  $T = 50$ ,  $\phi = 10$  et  $x_m = 2$



## II. Oscillateur libre typique : le cas du ressort



- Vérifions tout d'abord que l'on ait bien une position d'équilibre stable...

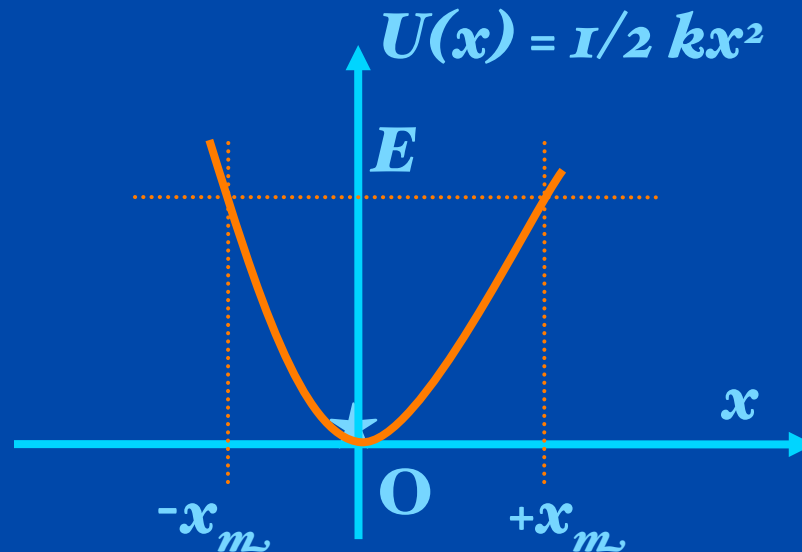
$$U = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow U' = kx \Rightarrow U'' = k$$

Or :  $U' = 0 \Rightarrow x_e = 0$

et :  $U''(x_e = 0) = k > 0$

donc : on a bien une position d'équilibre stable !

- On a donc :



C'est-à-dire un mouvement oscillant...

Que valent donc  $x(t)$  et  $T$  (période de l'oscillation) ?

Il y a conservation de l'énergie mécanique au cours du temps, c'est-à-dire :

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = 0$$

or :

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

autrement dit :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

(Remarque : voir Ex. 3.2 TD#0...)

Afin de calculer la dérivée de E par rapport au temps, il convient donc de calculer celles de  $x^2$  et de  $\dot{x}^2$

$$\frac{dx^2}{dt} = \frac{dx^2}{dx} \frac{dx}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} = 2x\dot{x}$$

$$\frac{d\dot{x}^2}{dt} = \frac{d\dot{x}^2}{d\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} = 2\dot{x}\ddot{x}$$

Donc :

$$\dot{E} = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$



Il existe une autre façon de démontrer cette dernière relation, il suffit pour ce faire d'écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée au système ici présent, on obtient alors immédiatement :

$$-kx = m\ddot{x}$$

D'où, à nouveau :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

(Remarque : Ex. 1 TD#4...)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On reconnaît là l'équation harmonique avec :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = +\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Qui représente la pulsation. D'où l'expression de la période des oscillations :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(NB : période indépendante de l'amplitude des oscillations!)

Et l'on a (solution de l'équation harmonique) :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

avec :

$$x_m = \text{amplitude des oscillations}$$

$$\omega = \text{pulsation} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\phi = \text{phase à l'origine}$$

D'où également :

$$\dot{x}(t) = -\omega x_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

(Remarque : Ex. 3.3 TD#0...)

Quant à l'amplitude  $x_m$  et la phase à l'origine  $\phi$ , elles sont déterminées par les conditions initiales sur la position  $x$ , i.e. par  $x_0 = x(t=0)$ , et la vitesse  $v = \dot{x}$ , i.e. par  $v_0 = v(t=0)$ . On a donc :

$$x_0 = x_m \cos \phi$$

$$v_0 = -\omega x_m \sin \phi \Rightarrow \frac{v_0}{\omega} = -x_m \sin \phi$$

D'où :

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = x_m^2 \Rightarrow x_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

On remarque donc que l'amplitude  $x_m$  n'est pas forcément égale à la valeur initiale de la position  $x_0$ . Elle l'est seulement et uniquement si la vitesse initiale  $v_0$  est nulle.

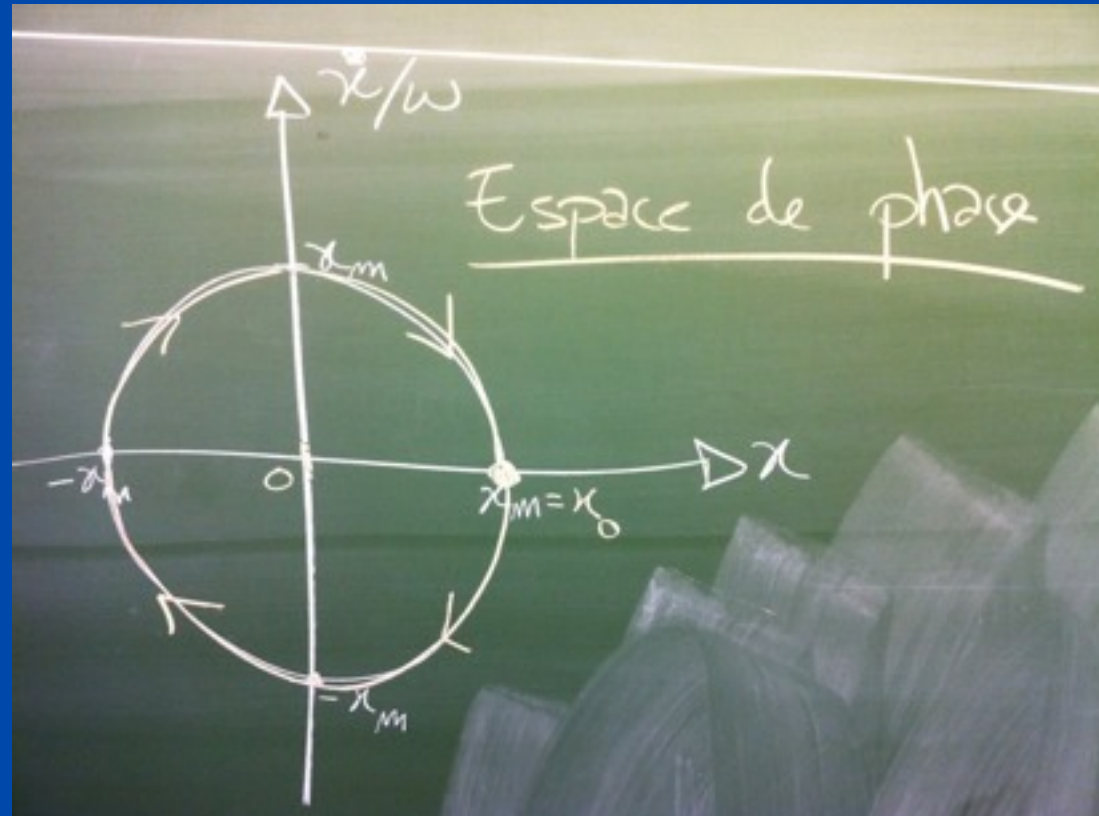
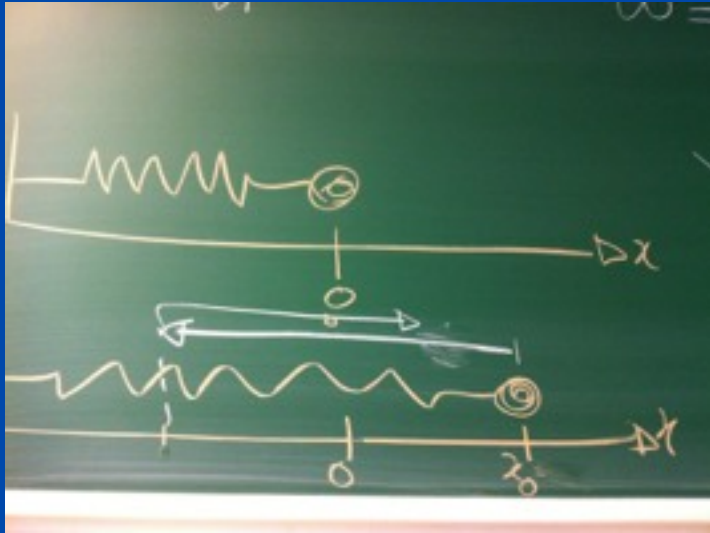
D'autre part,  $x_m$  est égale à  $v_0/\omega$  si  $x_0=0$ .

On peut aussi diviser par la position initiale (si  $x_0$  est non-nulle!) l'expression de la vitesse initiale sur la pulsation, d'où :

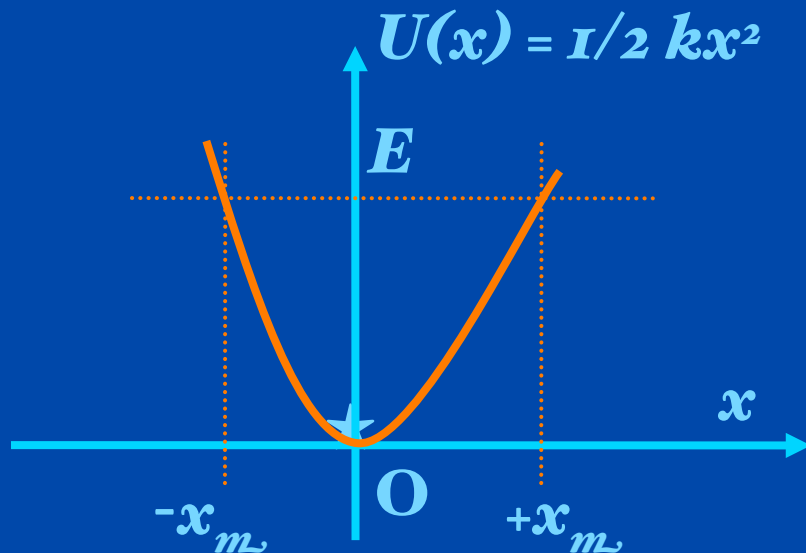
$$\frac{v_0}{x_0\omega} = -\tan \phi \Rightarrow \phi = \arctan \left( -\frac{v_0}{x_0\omega} \right)$$

On a donc bien retrouvé l'amplitude  $x_m$  et la phase à l'origine  $\phi$  en fonction des conditions initiales.

## Remarque 1 : Espace de phase !!



**Remarque 2 :** On a enfin, pour les valeurs de  $x$  où  $v$  s'annule (i.e. en  $-x_m$  et  $+x_m$ ),  $E_c$  qui s'y annule également. D'où, en ces points :  $E_c=0$ , i.e. :  $E=U$ , et donc :

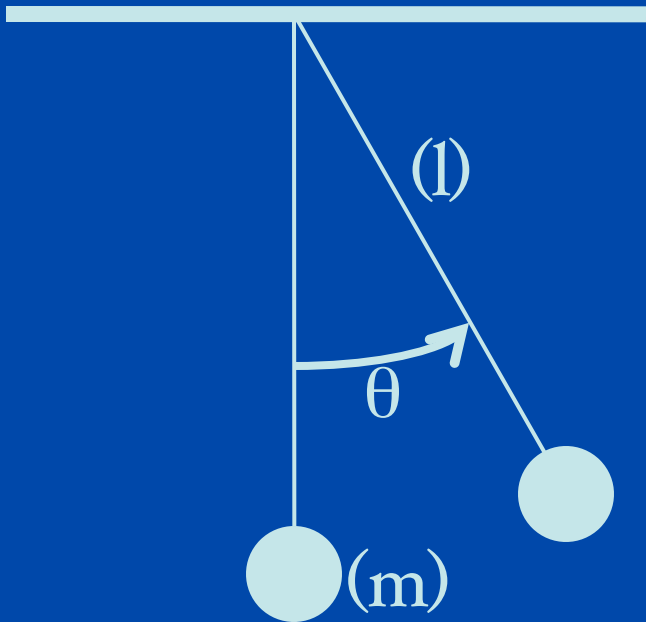


$$E = \frac{1}{2} k x_m^2$$

Ce qui signifie que l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique dépend directement de l'amplitude.



# III. Le cas du pendule simple



$$U(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$$

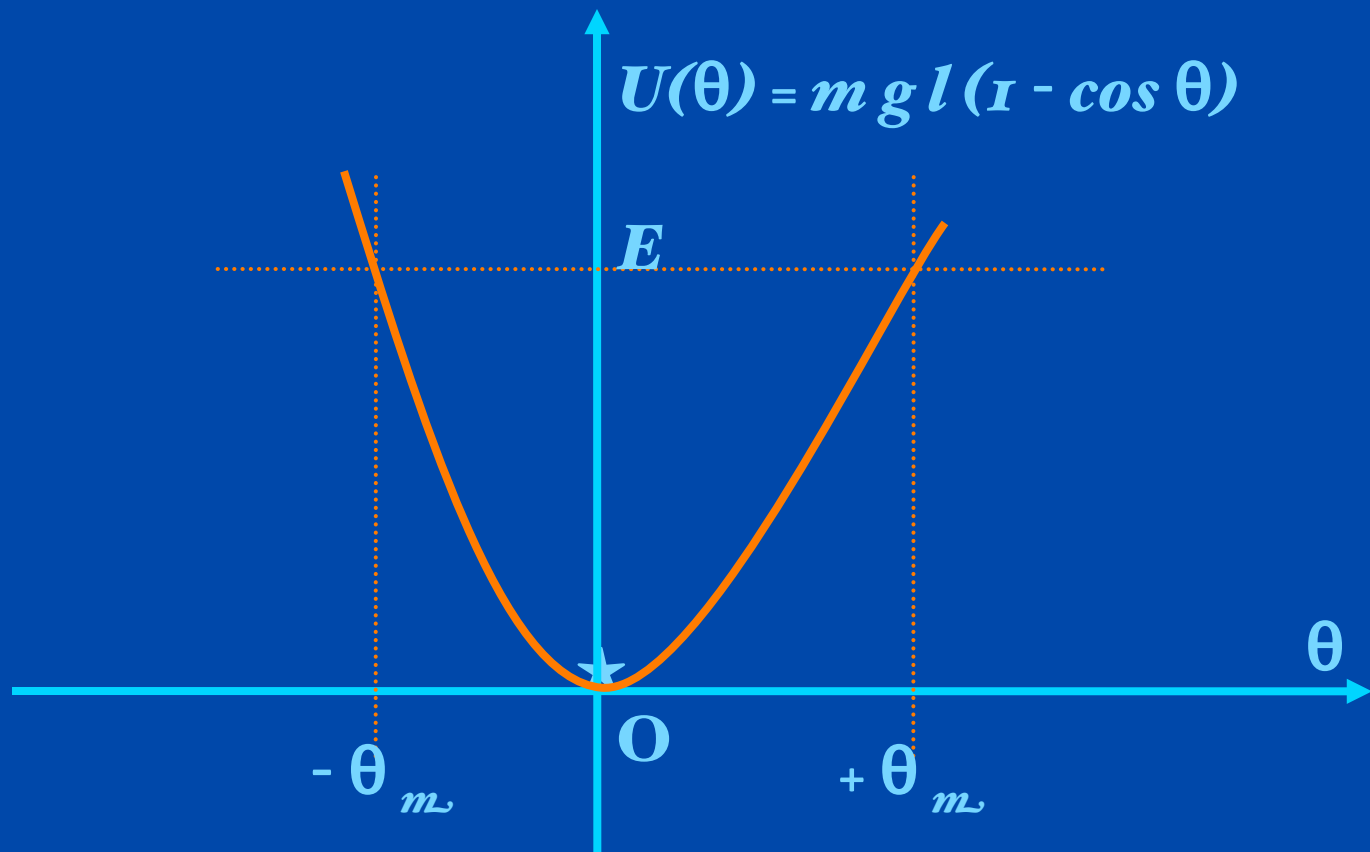
$$\Rightarrow U'(\theta) = mgl \sin \theta$$

$$\Rightarrow U''(\theta) = mgl \cos \theta$$

(Remarque : Ex.3.3 TD#0 et Ex.7 TD#4...)

Donc :  $\theta_e = 0$ , car :

$$U'(0) = 0 \quad \text{et} \quad U''(0) = mgl > 0$$



Et l'on a :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + m g l (1 - \cos \theta)$$

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m g l (1 - \cos \theta), \text{ car } v = l \dot{\theta}$$

Invoquer la conservation de l'énergie par rapport au temps revient à écrire alors :

$$\dot{E} = 0 \Rightarrow ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgl \sin \theta \dot{\theta} = 0$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

... qui n'est pas une équation harmonique à cause de la présence du sinus...

**Le pendule simple n'est donc pas, dans le cas général, un oscillateur harmonique !**

Mais regardons de près le cas particulier des petites oscillations du pendule (oscillations de faible amplitude) (voir aussi Ex. 3.4 TD#0...):

$$\theta \text{ petit} \Rightarrow \sin \theta \simeq \theta$$

$$[NB : \sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} = 0.52]$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

... qui est bien une équation harmonique, avec :

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

# Rappel : développements limités de Taylor (autour d'une valeur donnée) :

$$f(x)|_{x \simeq x_0} \simeq f(x)|_{x=x_0} + \frac{df}{dx}|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}|_{x=x_0}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}|_{x=x_0}(x - x_0)^n$$

=> développement de Taylor de  $\sin(x)$  autour de  $x=0$ , au 2d ordre :

$$\sin(x)|_{x \simeq 0} \simeq \sin(0) + \cos(0) x + \frac{1}{2}(-\sin(0)) x^2 \Rightarrow \sin(x)|_{x \simeq 0} \simeq x$$

(c'est-à-dire un peu plus que 0 !)

=> développement de Taylor de  $\cos(x)$  autour de  $x=0$ , au 2d ordre :

$$\cos(x)|_{x \simeq 0} \simeq \cos(0) + (-\sin(0)) x + \frac{1}{2}(-\cos(0)) x^2 \Rightarrow \cos(x)|_{x \simeq 0} \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$$

(c'est-à-dire un peu moins que 1 !)