

Cinématique

- Le Mouvement -

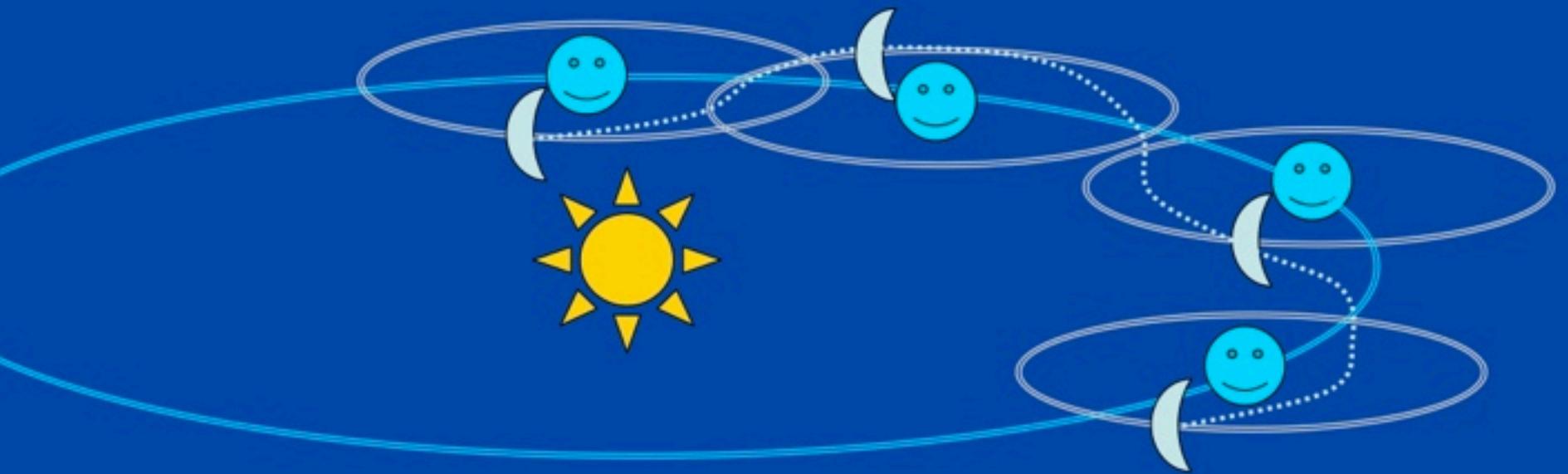
Un objet est en mouvement *par rapport à* un autre lorsque sa position \mathbf{r} , vue ou mesurée par rapport au second objet, évolue en fonction du temps \mathbf{t} .

- Si $\mathbf{r}(\mathbf{t})=\text{constante}$, l'objet n.1 est au *repos relatif* par rapport à l'objet n.2.

- Repos et mouvement sont donc des notions *relatives*.

➡ Nécessité de définir un *système de référence* pour pouvoir analyser le mouvement.

... Exemple du mouvement de la Lune par rapport à la Terre et par rapport au Soleil...



I. Mouvement rectiligne

- mouvement rectiligne => trajectoire = une droite
- notion de vitesse moyenne :



$$\text{vitesse moyenne} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- notion de vitesse instantanée :

$$v_{\text{inst.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

- d'où :

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt$$

position
de départ

déplacement
pendant dt

Exemple d'application #1

{Ex.1, feuille de TD #1}

Une particule se déplace le long de l'axe des x de telle sorte que $x(t) = 5t^2 + 1$. Calculer sa vitesse moyenne dans l'intervalle compris entre :

(a) 2 s et 3 s $x(2s) = 21m$ & $x(3s) = 46m \Rightarrow \Delta x = 25m, \Delta t = 1s \Rightarrow v_{moy} = 25 m/s$

(b) 2 s et 2.1 s $v_{moy} = 20.5 m/s$

(c) 2 s et 2.001 s $v_{moy} = 20.005 m/s$

(d) 2 s et 2.00001 s $v_{moy} = 20.00005 m/s$

Quelle est sa vitesse instantanée à $t = 2$ s ?

$$v(t) = \limite de v(2s+dt) \text{ quand } dt \rightarrow 0 = 20 m/s$$

$$\text{En effet : } v(t) = dx/dt = d/dt (5t^2 + 1) = 10t \Rightarrow v(2s) = 20 m/s$$

- notion d'accélération moyenne :

Comme la position, la vitesse est une fonction de t . Si la *vitesse est constante*, le mouvement est dit *uniforme*, ce qui correspond à une *accélération nulle*. En effet l'accélération moyenne a est définie telle que :

$$a = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- notion d'accélération instantanée :

De même que pour la vitesse, on a simplement :

$$a_{\text{inst.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Et donc :

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a \, dt$$

vitesse
de départ

variation de
 v pendant dt

- en voulant lier l'accélération à la position :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

- et de même :

$$v \, dv = a \, dt \frac{dx}{dt} = a \, dx$$

- ce qui donne :

$$\int_{v_0}^v v \, dv = \int_{x_0}^x a \, dx \Rightarrow \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \int_{x_0}^x a \, dx$$

- quelques cas simples de mouvements rectilignes :
 - les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{a} sont de même sens : le mouvement est *accélééré*
 - les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{a} sont de sens contraire : le mouvement est *décélééré* (ou *retardé* ou *freiné*)
 - \mathbf{v} est constant (et donc \mathbf{a} est nul) : le mouvement est dit *rectiligne uniforme*, et l'on a :

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt = x_0 + v(t - t_0)$$

- **a** est constant : le mouvement est dit *rectiligne uniformément accéléré*, et l'on a :

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Mais aussi :

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

- en prenant $t_0=0$ on a tout simplement :

$$v(t) = v_0 + a t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

... qui sont finalement les équations du cas général <<*mouvement rectiligne*>>, en effet :

- $a=cste \neq 0 \Rightarrow$ mvt rect. uniformément accéléré
- $a=0 \Rightarrow$ mvt rect. uniforme

On remarque que contrairement à l'intuition qui nous ferait classer les mouvements rectilignes en deux classes :

- <<au repos ($v=0$)>> ,
- <<en mouvement ($v \neq 0$)>> .

On a plutôt la classification suivante :

- <<vitesse constante ($a=0$)>>
- <<vitesse variable ($a \neq 0$)>>

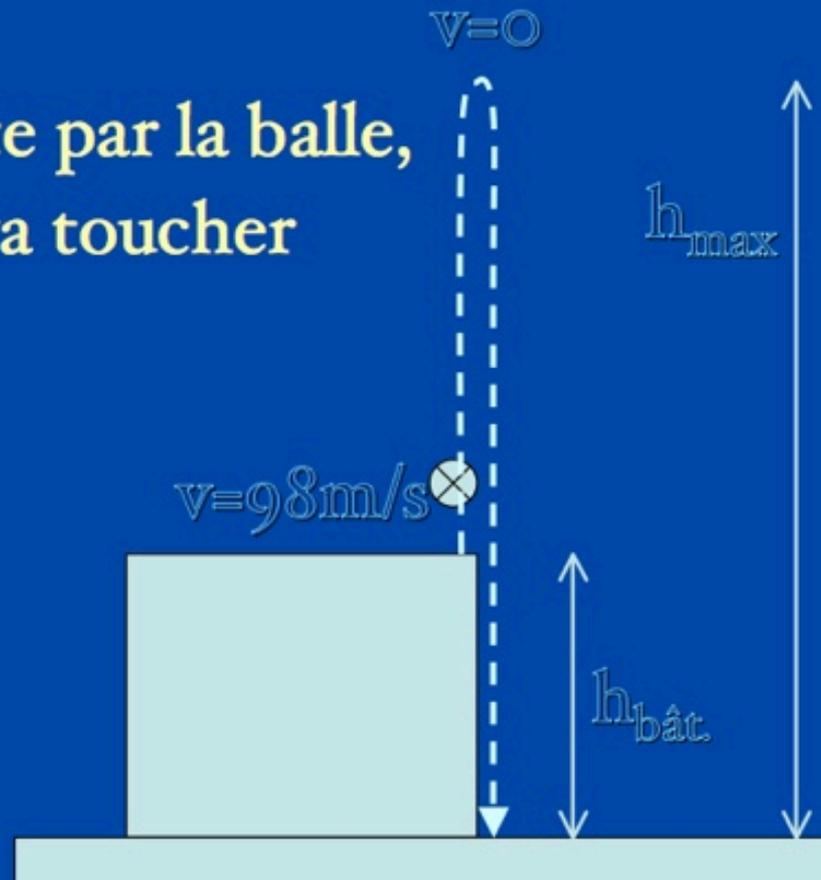
Exemple d'application #2

[Ex.2, feuille de TD #1]

On tire une balle verticalement vers le haut avec $v_0 = 98 \text{ m/s}$ depuis le toit d'un bâtiment de 100 m de haut. Trouver :

- (a) la hauteur maximum atteinte par la balle,
- (b) la vitesse avec laquelle elle va toucher terre de nouveau,
- (a) le temps total écoulé.

On donne $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.



Exemple d'application #2

{Ex.2, feuille de TD #1}

Comment aborder ce problème ?

Il s'agit, à l'aller comme au retour, d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) avec :

accélération = celle de la pesanteur (vecteur g), donc :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Et l'on a (en choisissant un sens positif vers le haut) :

$$a = -g, \text{ avec : } g = \|\vec{g}\| \text{ et } a \text{ la valeur algébrique de } \vec{a}$$

Exemple d'application #2

{Ex.2, feuille de TD #1}

On a donc, à l'aller comme au retour :

$$a = -g$$
$$\Rightarrow v = at + v_0 = -gt + v_0$$
$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

Mais aussi :

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) = -2g(x - x_0)$$

Où v_0 et x_0 sont des valeurs algébriques qui vont dépendre de l'état initial considéré et de l'axe choisi (sens et origine).

(a) hauteur maximum h_{\max} atteinte par la balle :

On a :

$$v(t) = v_0 - g t$$
$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2(t) = v_0^2 - 2 g (x(t) - x_0)$$

En posant :

- état initial : $t_0 = 0$ $x_0 = 100 \text{ m}$ $v_0 = 98 \text{ m/s}$
- état final : $t_f = ?$ $x_f = ?$ $v_f = 0 \text{ m/s}$

On trouve :

$$x_f = x_0 + \frac{v_0^2}{2g} = h_{\max} = 590 \text{ m}$$

(b) vitesse de la balle quand elle touche le sol :

On a toujours :

$$v(t) = v_0 - g t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2(t) = v_0^2 - 2 g (x(t) - x_0)$$

Mais en posant :

- état initial : $t_0 = 0$ $x_0 = 590 \text{ m}$ $v_0 = 0 \text{ m/s}$

- état final : $t_f = ?$ $x_f = 0 \text{ m}$ $v_f = ?$

On trouve alors :

$$v_f^2 = v_0^2 - 2 g (x_f - x_0) = 2 g h_{\max}$$

C'est à dire :

$$\|v_f\| = \sqrt{2 g h_{\max}}$$

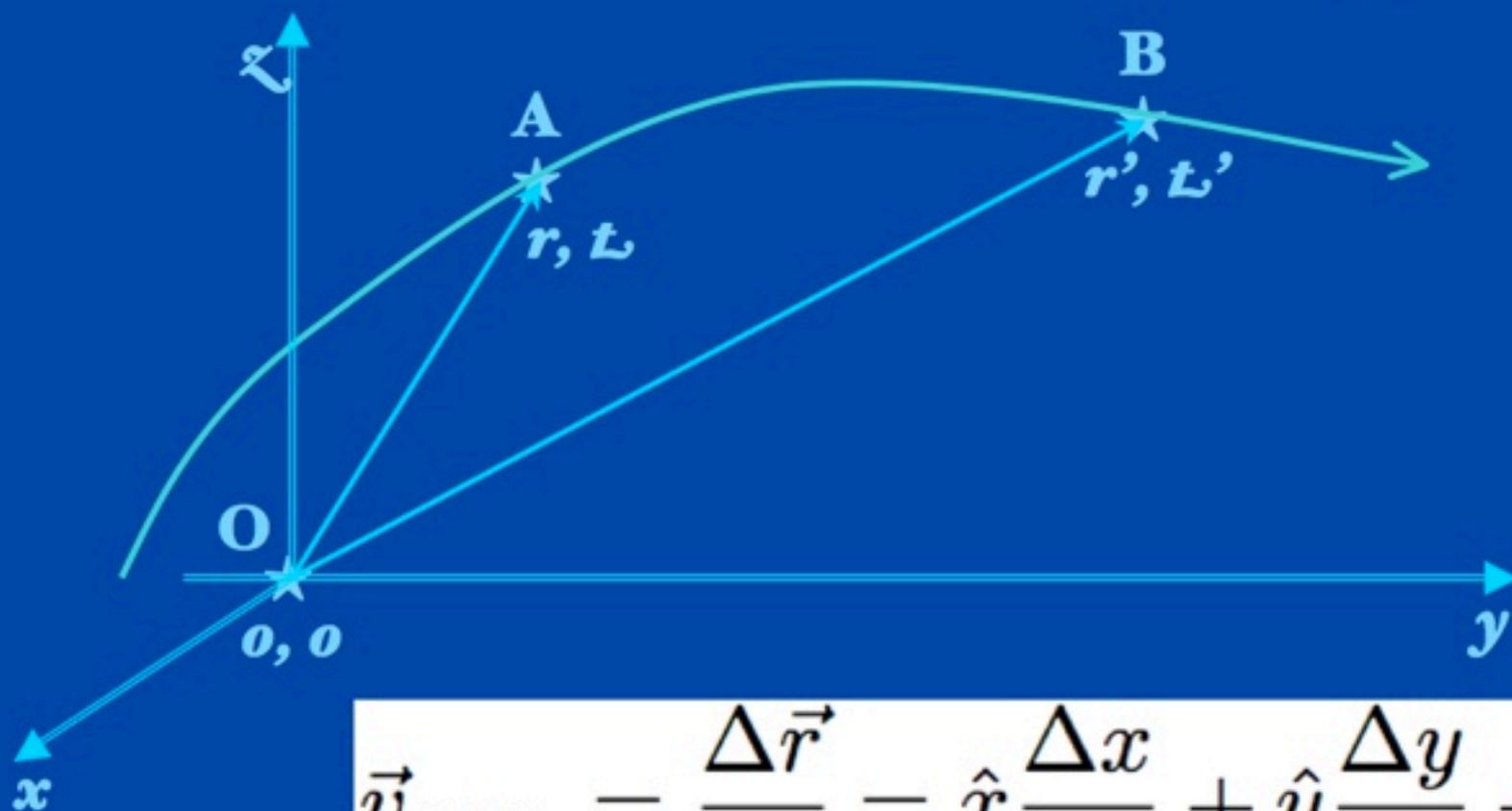
(c) temps total écoulé :

montée : $t_{(a)} = \frac{v_0}{g} = 10 \text{ s}$

descente : $t_{(b)} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 10.97 \text{ s}$

=> total : $t_{\text{total}} = t_{(a)} + t_{(b)} \simeq 20.97 \text{ s}$

II. Mouvement curviligne



$$\vec{v}_{\text{moy.}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \hat{x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \hat{z} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{\text{inst.}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{x} \frac{dx}{dt} + \hat{y} \frac{dy}{dt} + \hat{z} \frac{dz}{dt} = \hat{u}_t v_{\text{inst.}}$$

- de même :

$$\vec{a}_{\text{moy.}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \hat{x} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \hat{y} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} + \hat{z} \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

- et :

$$\vec{a}_{\text{inst.}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{x} \frac{dv_x}{dt} + \hat{y} \frac{dv_y}{dt} + \hat{z} \frac{dv_z}{dt}$$

$$\vec{a}_{\text{inst.}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \hat{x} \frac{d^2 x}{dt^2} + \hat{y} \frac{d^2 y}{dt^2} + \hat{z} \frac{d^2 z}{dt^2}$$

- Le *mouvement curviligne uniformément accéléré* :

$$\vec{a} = \text{const.}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} (t - t_0)$$

\vec{v}_0 et \mathbf{a} ont *a priori* des directions différentes

$\Rightarrow \mathbf{v}$ n'est donc pas // à \mathbf{a} , mais se trouve toujours dans le même plan défini par \vec{v}_0 et \mathbf{a}

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} (t - t_0)^2$$

de plus l'extrémité de \mathbf{r} se trouve toujours dans le même plan // à \vec{v}_0 et \mathbf{a} passant par le point défini par \mathbf{r}_0

\Rightarrow le mouvement curviligne uniformément accéléré est toujours plan ! (et c'est une parabole)

- en prenant ici aussi $t_0=0$ on obtient simplement :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$v^2(t) - v_0^2 = 2 \vec{a} (\vec{r}(t) - \vec{r}_0)$$

(démontrer cette dernière équation...)

(Exercice 3)

- Exemple du mouvement d'un projectile :

$\vec{a} = \vec{g}$ = accélération de la pesanteur

$$\vec{g} = -\|\vec{g}\| \hat{y}$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{x} + v_{0y} \hat{y}$$

avec $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ et $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$$

avec $v_x = v_{0x}$ et $v_y = v_{0y} - gt$

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$$

avec $x = v_{0x} t$ et $y = v_{0y} t - \frac{1}{2}gt^2$

Exemple d'application #3

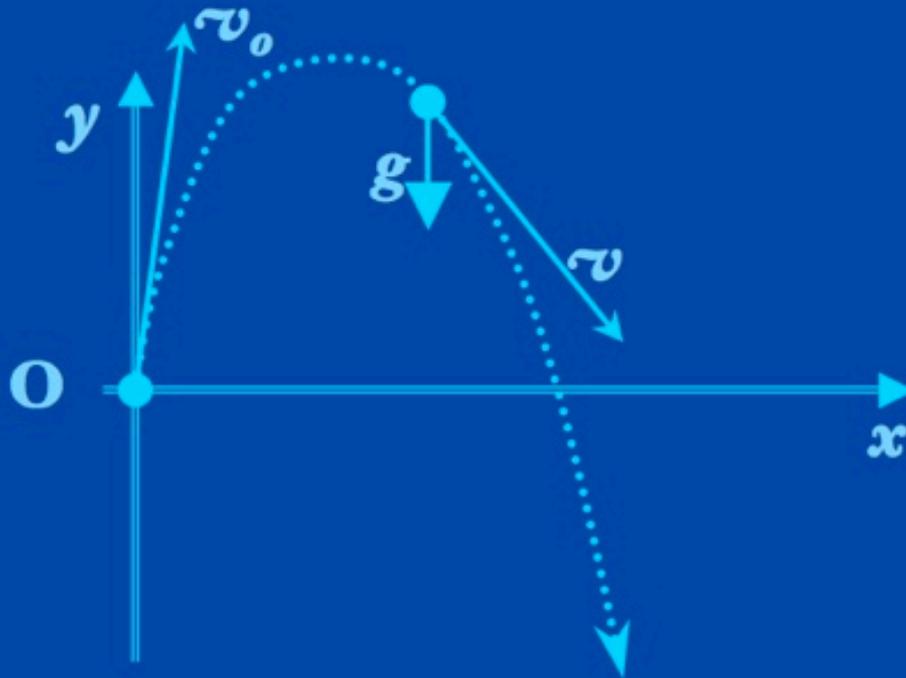
[Ex.4, feuille de TD #1]

Trouver :

(a) la hauteur atteinte h

(b) le temps de vol t_{vol}

(c) la distance horizontale parcourue (portée) d



À noter que l'on néglige ici :

- la courbure de la Terre
- la variation de la pesanteur avec la hauteur
- la résistance de l'air

(a) hauteur h atteinte :

Hauteur maximum atteinte ($y=h$) quand $v_y=0$, d'où :

$$v_{0y} = g t_{y=h} \Rightarrow t_{y=h} = \frac{v_{0y}}{g}$$

Ce qui entraîne :

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow h = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g}$$

Et donc :

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

(b) temps de vol t_{vol} :

On a : $t_{\text{vol}} = t_{\text{montée}} + t_{\text{descente}}$

On a aussi déjà vu que : $t_{\text{montée}} = v_{oy} / g = v_0 \sin \alpha / g$

Quant à t_{descente} , il est par symétrie du problème bien évidemment égale à $t_{\text{montée}}$, d'où :

$$t_{\text{vol}} = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

(c) portée d :

En injectant l'expression de t_{vol} dans l'équation :

$$x = v_{0x} t \Rightarrow d = v_{0x} t_{\text{vol}}$$

On obtient :

$$d = 2 \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

... au fait : comment optimiser cette portée d ?

$$\alpha = \pi/4 \Rightarrow \sin(2\alpha) = 1 \Rightarrow d = \frac{v_0^2}{g}$$

***composantes tangentielle et
normale de l'accélération***

Composante ***tangentielle*** de l'accélération :
dénote une variation du ***module*** de \boldsymbol{v}
(et de son sens !)

Composante ***normale*** de l'accélération :
dénote une variation de la ***direction*** de \boldsymbol{v}

Et on a :

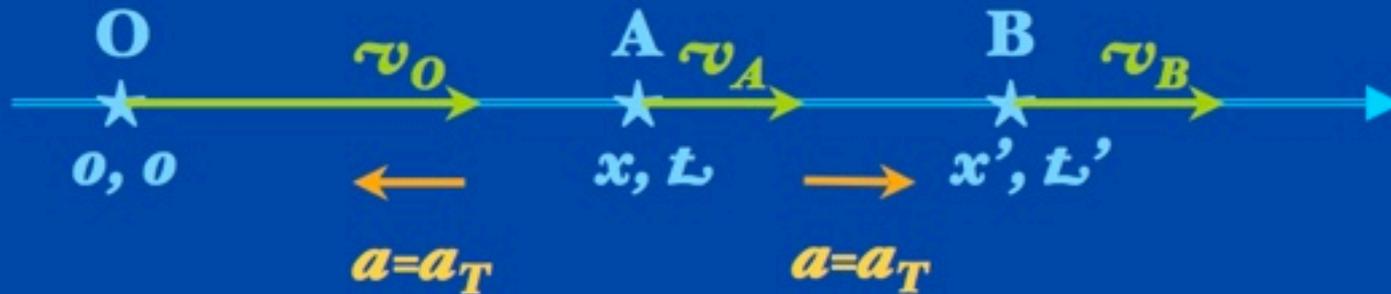
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

Où ρ est le rayon de courbure (R pour un cercle, ∞ pour une droite)

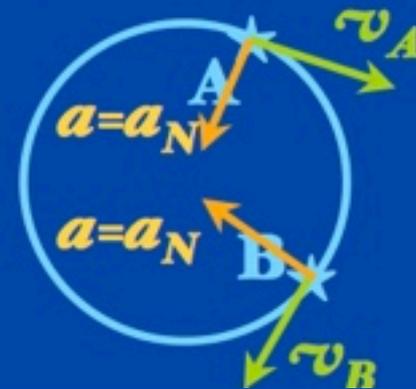
Cas particulier du mouvement *rectiligne* :

- composante *normale* toujours nulle, (\leftarrow dir. du vecteur v ne varie pas!)
- composante *tangentielle* = accélération.



Cas particulier du mouvement *uniforme* :

- composante *normale* = accélération,
- composante *tangentielle* toujours nulle. (\leftarrow v ne varie pas!)



mouvement circulaire :
vitesse et accélération angulaires

- notion de ***vitesse angulaire*** ω :

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r \omega$$

$$v = r\dot{\theta}$$

- si ω est constant (mvt circulaire uniforme), on a :

$$\theta = \theta_0 + \omega (t - t_0)$$

$$\theta = \theta_0 + \dot{\theta}(t - t_0)$$

... en prenant $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$ et $\theta_0 = 0$ on a ($\nu =$ fréquence) :

$$\theta = \omega t \text{ ou } \omega = \frac{\theta}{t} \text{ et } \omega = 2\pi\nu$$

- notion d'*accélération angulaire* $d\omega/dt$:

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- si $d\omega/dt$ est constant (mvt circulaire uniformément accéléré), on a :

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega} (t - t_0)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \dot{\omega} (t - t_0)^2$$

- De plus, dans le cas du mouvement circulaire :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d^2\theta}{dt^2} = r \dot{\omega}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

$$a_T = r\ddot{\theta}$$

$$a_N = r\dot{\theta}^2$$